81. 次元をあげない Compactification

寺阪英孝 (1948. II. 23)

≪可分正則空間 R の次元が n なるとき R は同次元の compact (完閉) な距離空間 R^* に入れられる≫ といふ Hurewicz のよく知られた定理に同氏は三つの証明を与へてゐるが，いづれも $\dim R = n$ を初めから十分に用ひてゐる．Wallman のやり方では次元と無関係な完閉化を行ひ，然る後次元があがらないことを証明するのであるが，これを今の問題に当てはめると，R^* が T_1 空間になつて了つたり，又は可分でなくなつて了つて具合が悪い．筆者はいろいろ考へて見た結果，思はしい成果があげられなかつたけれど，H氏の Monatsh. 37 (1930) に極く近いが幾分分りよい点もある証明を得たので御参考に供する．紙面の都合により大略を証明ぬきで説明する．

§1. R を可分，正則，且完閉でない n 次元空間とする．

$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \cdots$ を夫々有限開被覆系なる基本系 — Menger の erzeugende Doppelfolge — とする．

まず $\mathfrak{U}_1 = \{U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \cdots, U_{N_1}^{(1)}\}$ をとる．$\dim R = n$ であるから，

$$R = V_1^{(1)} + \cdots + V_{N_1}^{(1)},\quad V_i^{(1)} \ll U_i^{(1)} \quad 且 \quad \{\overline{V_i^{(1)}}\}$$

の次数が $\leqq n+1$ であるような $V_i^{(1)}$ が見つかる。そこで更に $V_i \ll W_i^{(1)} \ll U_i^{(1)}$ で且 $\overline{V_i^{(1)}} \wedge \overline{V_j^{(1)}} = 0$ なら $\overline{W_i^{(1)}} \wedge \overline{W_j^{(1)}} = 0$ であるやうな $W_i^{(1)}$ を求める。この $V_i^{(1)}, W_i^{(1)}$ につき $f_i^{(1)}(x)$ なる連続函数 $0 \leqq f_i(x) \leqq 1$ を求め $x \in V_i^{(1)}$ なら $f_i^{(1)}(x)=1$, $x \in R - W_i^{(1)}$ なら $f_i^{(1)}(x)=0$ であるとする。（空間が正規なることを用ひる）

次に $\varepsilon_1 > 0$ を与へ、$\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon_1}{2}$ なる整数につき

$$\left\{ x \,\middle|\, \frac{k-1}{p} < f_i^{(1)}(x) < \frac{k+1}{p} \right\} \quad (k=0, \cdots, p)$$ なる開集合で R を有限個の開集合に分ちその各の中では二点 x, y に対し $|f_i^{(1)}(x) - f_i^{(1)}(y)|$ が $< \varepsilon_1$ であるようにし、これと被覆系 $\mathfrak{U}_2$ とに共通な細分を $\mathfrak{U}_2'$ として、前と同じように $V_i^{(2)}, W_i^{(2)}$ なる次数 $\leqq n+1$ の $\mathfrak{U}_2'$ の細分を求め、引きつづいて $f_i^{(2)}(x)$ を定義する。

一般に $f_i^{(1)}(x), \cdots f_i^{(\nu-1)}(x)$ が定義されたとき、

$\mathfrak{U}_\nu'$ なる有限開被覆系で求め これに属する一つの開集合の二点 x, y については $|f_i^{(1)}(x) - f_i^{(1)}(x)| < \varepsilon_1, \cdots\cdots |f_i^{(\nu-1)}(x) - f_i^{(\nu-1)}(x)| < \varepsilon_{\nu-1}$ であるようにし 結局 $f_i^{(\nu)}(x)$ $(i=1, 2, \cdots, N_\nu)$ を定義する。これらの $f_i^{(\nu)}(x)$ から R の二点 x, y につき距離 $d(x, y)$ を次の式で定義する。

$$(*) \quad d(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\nu} \sum_{i=1}^{N_\nu} \left| f_i^{(\nu)}(x) - f_i^{(\nu)}(y) \right| \right)$$

この距離で R は全有界になるから、知られた定理（Hausdorff Mengenlehre (1927), 106–108 頁）により R は完備空間 R^* に完備化出来る。

§2. R^* は次のように直接造ることも出来る。

R の発散点列（R 内に集積点をもたぬ点列）$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots (= X)$ を考へ X の任意部分列

$$X_\lambda = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\cdots\}$$

の族 $\{X_\lambda\} = \mathscr{E}$ で (i) 有限交叉性をもつ (ii) 極大のもの 即ちイデアル（フィルター）を考へる。

今 R の任意の集合 M をとると $\mathscr{E}$ の中には $X_\lambda \subset M$ なる X_λ が存在するか、又は

$X_\lambda \subset R-M$ なる X_λ が存在するかである。最初の場合 $\mathfrak{G}$ は M に含まれる。$\mathfrak{G} \subset M$ といふことにする。

かかる $\mathfrak{G}$ につき上記の函数で $f_i^{(\nu)}(\mathfrak{G})$ の値 α といふのを次の様に定義する。

R での $\varepsilon>0$ につき $\{x \mid f_i^{(\nu)}(x) > \alpha-\varepsilon\} \supset \mathfrak{G}$ であるが $\{x \mid f_i^{(\nu)}(x) < \alpha+\varepsilon\} \supset \mathfrak{G}$ ではない α を $f_i^{(\nu)}(\mathfrak{G}) = \alpha$ とする。R に M でのイデアル $\mathfrak{G}$ を附加して R^* とし、$d(x,y)$ の式中 x, y に $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ 等を入れたもので距離を定義すれば、距離空間が得られる。この R^* が求める n 次元の完備空間なのである。

完備なことは次のようにして分る。それは $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \in R^*$ を考へる。今いつもの方のやり方で [例へば紙上談話会第5号, 45]

$$\varepsilon = (\varepsilon^1 \varepsilon^2 \cdots \varepsilon^n \cdots)$$

を 0 及び 1 からなる数 ε^n の列とし これについて定ったイデアルを $\mathfrak{N} = \{\varepsilon_\lambda\}$ とする。$\mathfrak{N}$ の各元 ε と $\mathfrak{G}_n = \{X_{\lambda_n}\}$ の各元 X_{λ_n} から

$$X_\varepsilon = \varepsilon^1 X_{\lambda_1} + \varepsilon^2 X_{\lambda_2} + \cdots + \varepsilon^n X_{\lambda_n} + \cdots$$

とつくる。但し $\varepsilon^n = 0$ なら $\varepsilon^n X_{\lambda_n} = 0$; $\varepsilon^n = 1$ なら $\varepsilon^n X_{\lambda_n} = X_{\lambda_n}$ とする。すると、$\{X_\varepsilon\} = \mathfrak{G}$ がイデアルになることが分る。どんな $\varepsilon>0$ についても $d(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_n) < \varepsilon$ なる n が見つかることが分るから $\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots$ の集積点である。

$\dim R^* = n$ のことは、$\varepsilon>0$ を与へると、ν が見つかって、$A_1^{(\nu)}, \cdots, A_{N_\nu}^{(\nu)}$ から作られる R^* 閉集合が直径 $<\varepsilon$ であり、且次数 $\leq n+1$ であることから証明される。　以上

Nöbeling の Einbettungssatz を、この $f_i^{(\nu)}(\mathfrak{G})$ を用ひれば、R を先づ完備にしておかなくても証明出来る。結局 H.E. の定理は補助定理的の意味が次第に薄らいで行くので、自分も次元論の講義では却って Nöbeling のあとして出してやった。併し趣きとしては一次元の定理を次元論中のなるべく早い段階で出したいものだと思ってゐる。